Лекц 4: Коши-Крофтоны томьёо

C нь хавтгайн регуляр муруй байг. Бид C-г огтолдог хавтгайн бүх шулуунуудын хувьд тухайн шулууны C-тэй огтлолцох цэгийн тоог уг шулууны **давтамж**(multiplicity) гэж нэрлэнэ.

Бид хавтгай дээрх шулуунуудын дэд олонлогт хэмжээс(талбай) тодорхойлох зорилт тавья. Ийм хэмжээс тодорхойлох боломжтой. Шулууныг хоёр параметрээр тодорхойлох боломжтой учир шулууныг ямар нэг хавтгайн цэг мэтээр төсөөлж болох учир энэхүү хавтгай дээрх мужын талбай бодох арга зам хайх шаардлагатай болно.

Ийм хэмжээс тодорхойлсны дараа C-г огтлох шулуунуудын олонлогийн хэмжээсийг олох болно.

Теорем 1 (Коши-Крофтоны томьёо)**.** *C нь ℓ урттай хавтгайн регуляр муруй байг. C-г огтлох шулуунуудын олонлогийн хэмжээс(давтамжийг тооцон) 2ℓ байна.*

Хавтгай дахь L шулууны хувьд координатын эх O-с L шулуун хүрэх зай ρ болон O цэгээс L шулуунд буулгасан перпендикулярын Ox тэнхлэгтэй үүсгэх өнцөг θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ хоёроор бүрэн тодорхойлогдоно. Эдгээрийг ашиглавал L-ийн тэгшитгэл

$$x \cos\theta + y \sin\theta = \rho$$

хэлбэртэй байна.

Иймд бид хавтгайн бүх шулууны олонлогийг

$$\mathfrak{L} = \{(\rho, \theta) \in \mathbf{R}^2 \mid \rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

олонлогоор сольж болно.

$F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $(\overline{x}, \overline{y}) \mapsto (x, y)$ ба

$$\begin{aligned} x &= a + \overline{x}\cos\varphi - \overline{y}\sin\varphi \\ y &= b + \overline{x}\sin\varphi + \overline{y}\cos\varphi \end{aligned} \tag{1.1}$$

буулгалтыг $\mathbf{R}^2$ дээрх **хөдөлгөөн** гэж нэрлэнэ. Хөдөлгөөнийг графикаар илэрхийллээ. $S \subset \mathbf{R}^2$ олонлог өгсөн тохиолдолд энэ олонлогийн талбайг олохдоо

$$\int\int_S dxdy$$

томьёогоор олдог билээ. Энэ интегралын утга олддог үед S-г **хэмжигдэх** гэж ярьдаг. Цаашид бид гарч буй интегралуудыг оршин байна гэж тооцно. Дээрх интеграл нь $dxdy$ эзлэхүүний элементийг S олонлог дээр интегралчилж байгаа билээ.

(1.1) томьёогоор өгсөн хөдөлгөөн нь $\mathfrak{L}$ олонлог дээрх хувиргалт тодорхойлно. Үнэн хэрэгтээ (1.1) хөдөлгөөн $x\cos\theta + y\sin\theta = \rho$ шулууныг

$$\overline{x}\cos(\theta-\varphi) + \overline{y}\sin(\theta-\varphi) = \rho - a\cos\theta - b\sin\theta$$

шулуунд буулгана. Иймд (1.1) тэгшитгэл $\mathfrak{L}$ дээр

$$\begin{aligned}\overline{p} &= p - a\cos\theta - b\sin\theta\\ \overline{\theta} &= \theta - \varphi\end{aligned}$$

төрлийн хувиргалт тодорхойлно. Энэ хувиргалтын Якобиан 1 болох учир ийм төрлийн хувиргалт хавтгай дахь шулуунуудын олонлог дээр транзитив байна. Мөн $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{L}$ олонлог дээрх хэмжээсийг

$$\int\int_{\mathfrak{S}} dpd\theta$$

гэж тодорхойлно. Энэ нь тогтмол үржвэрийн нарийвчлалтайгаар $\mathfrak{L}$ дээр эзлэхүүний элемент тодорхойлно.

Теоремын баталгааны товч Эхлээд C муруйг ℓ урттай хэрчим тохиолдлыг авч үзье. Бидний авсан хэмжээс хөдөлгөөнөөр инвариант учир координатын эхийг C-ийн дундаж цэг дээр, хэвтээ тэнхлэгийг C-ийн дагуу байдаг гэж үзэж болно. Тэгвэл C-г огтлох шулуунуудын олонлогийн хэмжээс

$$\int\int dpd\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{|\cos\theta|(\ell/2)} dp\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{\ell}{2}|\cos\theta|d\theta = 2\ell$$

болно. Одоо C_i, $i = 1,\ldots,n$ хэрчмүүдээс тогтох олон өнцөгтөн муруй байг. Эдгээрийн уртыг харгалзан ℓ_i, $\sum \ell_i = \ell$ гэе. $n = n(p,\theta)$-р (p,θ) шулууны C муруйтай огтлолцох цэгийн тоог тэмдэглэвэл C_i хэрчим болгоны хувь дахь утгуудыг нэмбэл

$$\int\int ndpd\theta = 2\sum_i \ell_i = 2\ell \tag{1.2}$$

болж теорем үнэн байна.

Эцэст нь хязгаар авах замаар дээрх томьёог регуляр муруйн хувьд үнэн гэдгийг батлаж болно.

$\square$