Лекц 3: Дөрвөн оройн тухай теорем

$\alpha : [0, \ell] \to \mathbf{R}^2$, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ нумын уртаар параметрчлэгдсэн муруй авъя. Үүний шүргэгч вектор $t(s) = (x'(s), y'(s))$-г авбал нэгж урттай вектор байх нь ойлгомжтой. Иймд

$$t : [0, \ell] \to \mathbf{R}^2, \quad t(s) = (x'(s), y'(s))$$

муруй тодорхойлж болох ба энэ муруйн цэгүүд нэгж тойрог дээр оршино. Уг муруйг шүргэгч индикатрикс гэж нэрлэдэг. Энэ муруйн шүргэгч векторыг авбал

$$\frac{dt}{ds} = (x''(s), y''(s)) = \alpha''(s) = kn$$

болно.

$t(s)$-ийн Ox тэнхлэгтэй үүсгэх өнцгийг $\theta(s)$ гэе. Тэгвэл тодорхойлолтоор $x'(s) = \cos\theta(s)$, $y'(s) = \sin\theta(s)$ байна. Мөн

$$\theta(s) = \mathrm{arctg}\frac{y'(s)}{x'(s)}$$

учир $\theta = \theta(s)$ функц орчинд сайн тодорхойлогдох бөгөөд тодорхойлогдсон орчиндоо

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \frac{d}{ds}(\cos\theta, \sin\theta) \\ &= \theta'(-sin\theta, \cos\theta) = \theta' \cdot n \end{aligned}$$

болно. Иймд $\theta'(s) = k(s)$ болох ба $\theta : [0, \ell] \to \mathbf{R}$ дифференциальчлагдах функцийг

$$\theta(s) = \int_0 sk(s)ds$$

гэж шинээр тодорхойлж болно. Энэ тохиолдолд

$$\theta' = k = x'y'' - x''y' = (\mathrm{arctg}\frac{y'}{x'})'$$

болох учир энэ функц анхны функцтэй тогтмол тоон үржигдхүүний нарийвчлалтайгаар тохирно. $\theta(s)$ функцийн утга нь бид α муруйг 0-с s утга хүртэл зурахад $t(s)$-ийн шүргэгч индикатрикс дээр зурах нийт өнцгийг заана. α битүү учир энэ энэ өнцөг 2π-ийн бүхэл үржвэр байна. Өөрөөр хэлбэл,

$$\int_0^\ell k(s)ds = \theta(s) - \theta(0) = 2\pi I$$

болно. Энэ бүхэл тоо I-г α муруйн **эргэлтийн индекс** гэнэ.

Теорем 1. Энгийн битүү муруйн эргэлтийн индекс нь ± 1 байх бөгөөд тэмдэг нь муруйн ориентацаас хамаарна.

Хавтгайн регуляр муруй (заавал битүү байх албагүй) $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ муруйн хувьд бүх $t \in [a, b]$ утганд уг муруйн мөр $\alpha(t)$ цэг дээрх шүргэгч шулууны нэг талд оршдог бол уг муруйг **гүдгэр** муруй гэнэ. $t \in [a, b]$-ийн хувьд $k'(t) = 0$ бол $\alpha(t)$ цэгийг муруйн **орой** гэнэ. Жишээ нь эллипсийн тэнхлэгүүдтэйгээ огтлолцох дөрвөн цэг уг муруйн оройнууд болно. Хавтгайн гүдгэр, битүү муруй болгон дор хаяж дөрвөн оройн цэгтэй байна гэсэн ерөнхий чанартай байдаг.

Теорем 2 (Дөрвөн оройн тухай теорем)**.** Хавтгайн гүдгэр, битүү муруй болгон дор хаяж дөрвөн оройн цэгтэй байна.

Энэ теоремийн баталгаанд дараах леммийг хэрэглэнэ.

Лемм 1. $\alpha : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$ муруй уртаар парамертчлэгдсэн, хавтгайн битүү муруй ба A, B, C нь дурын бодит тоо байг. Тэгвэл

$$\int_0^1 (Ax + By + C)\frac{dk}{ds}ds = 0 \tag{1.1}$$

байна. Энд $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ ба k нь уг муруйн муруйлт юм.

Теоремын баталгаа Муруйг $\alpha : [0, \ell] \to \mathbf{R}$ нумын уртаар параметрчлээ. $k = k(s)$ функц $[0, \ell]$ интервал дээр тасралтгүй учир энэ интервал дээрээ хамгийн их ба бага утгаа авна. Иймд α муруй ядаж хоёр оройтой болох ба эдгээрийг $\alpha(s_1) = P$, $\alpha(s_2) = Q$ гэе. p, q цэгийг холбосон шулууныг L гээд p, q-д тулсан C муруйн нумыг β, γ байг.

β, γ нумнууд L шулуунаар тодоройлогдох хагас хавтгайнуудад тус тусдаа оршино. Тийм байдаггүй гэвэл L шулуун муруйг нэмэж R цэгээр огтолно. Эдгээрийн дунд орших цэгийг P гэвэл C гүдгэр муруй учир L шулуун муруйн шүргэгч болно. Гүдгэр муруйн чанараар L шулуун P, Q цэг дээр мөн шүргэгч байна...

L шулууны тэгшитгэл $Ax+By+C=0$ байг. Муруйд өөр орой байхгүй бол $k'(s)$-ийн тэмдэг β, γ муруйнууд дээр тус тусдаа тогтмол байна. Иймд бид (1.1) тэгшитгэлийн интеграл эерэг байхаар , B, C-ийн тэмдгийг сонгож болох ба энэ нь леммд зөрчинө. Иймд өөр бас нэг орой(гуравдахь) оршин байж $k'(s)$ тэмдгээ өөрчилнө. Энэ оройг β нум дээр оршдог гэе. Тэгвэл P, Q цэгүүд минимумь, максимумын цэгүүд учир бас дахин нэг орой байх шаардлагатай. $\square$