Лекц 2: Муруйн глобаль онол

$f : (c, d) \to \mathbf{R}^2$ функц дифференциальчлагдах ба $[a, b] \subset (c, d)$ бол уг функцийг $[a, b]$ битүү интервал дээр **дифференциальчлагдах** функц гэнэ.

$\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ регуляр, параметрчлэгдсэн муруйн хувьд

$$\begin{gathered}\alpha(a) = \alpha(b) \\ \alpha'(a) = \alpha'(b) \\ \alpha''(a) = \alpha''(b) \\ \cdots\cdots\end{gathered}$$

нөхцөл биелдэг бол түүнийг хавтгайн **битүү муруй** гэнэ.

Дээрх муруй өөрийгөө огтлоогүй ө.х. $t_1, t_2 \in [a, b]$ утгуудын хувьд $t_1 \neq t_2$ гэдгээс $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, бол **энгийн муруй** гэнэ.

Ихэнх тохиолдолд бид $\alpha : [0, \ell] \to \mathbf{R}^2$ муруйг нумын уртаар параметрчлэгдсэн гэж үзэх ба энэ тохиолдолд ℓ утга муруйн нийт урт болно. Заримдаа тухайн энгийн, битүү муруйн мөр C-г энгийн, битүү муруй гэж тооцно. Хавтгайн энгийн, битүү муруй C-ийн дотрыг энгийн, битүү муруй C хавтгайн мужыг хүрээлж байна гэж ярьна. Бид битүү муруйн дагуу параметрийн өсөх чиглэлд явахад муруйн дотор хэсэг зүүн талд оршихоор параметчилсэн гэе. Ийм төрлийн муруйг эерэг ориентацлагдсан муруй гэдэг.

Бид хавтгайн муруйн дараах глобаль чанарыг судална.

1. Изопериметрийн тэнцэтгэл биш

2. Дөрвөн оройн тухай теорем

3. Коши-Крофтоны томьёо

1.0.1 Изопериметрийн тэнцэтгэл биш

Хавтгайд ℓ урттай энгийн, битүү муруйнуудаас хамгийн их талбай хүрээлэх нь аль вэ? гэсэн бодлого аль эртнээс анхаарал татаж байв. Энэ бодлогын хариу ℓ урттай тойрог гэдгийг эртний грекчүүд мэдэж байсан хэдий ч уг бодлогын баталгааг хожим 1870 онд Вейрштрасс хийсэн юм. Энэ бодлогын хялбар баталгааг 1936 онд Шмидт хийжээ.

$\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ битүү муруйгаар хүрээлэгдэх дүрсийн талбай A-г дараах томьёо ашиглаж олъё.

$$A = -\int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt \quad (1.1)$$

Энд бид интегралын хэсэгчлэх томьёо ашигласан билээ.

$$\begin{aligned}\int_a^b y(t)x'(t)dt &= \int_a^b (x(t)y(t))'dt - \int_a^b x(t)y'(t)dt \\ &= [x(b)y(b) - x(a)y(a)] - \int_a^b x(t)y'(t)dt \\ &= -\int_a^b x(t)y'(t)dt\end{aligned}$$

Ерөнхий томьёог батлахын тулд **??**-р зурагт өгсөн дагуу y тэнхлэгтэй параллель хэрчмүүд болон

$$y = f_1(x), y = f_2(x), x \in [x_0, x_1], \quad f_1(x) > f_2(x)$$

байх нумаар хүрээлэгдсэн дүрсийн хувьд баталая.

Муруйгаар хүрээлэгдсэн дүрсийн талбай

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} f_2(x)dx$$

болно.

Муруй эерэг ориентацлагдсан учир дээрх зурагны тэмдэглэгээг ашиглан интегралыг t хувьсагчаар илэрхийлбэл

$$A = -\int_a^{t_1} y(t)x'(t)dt - \int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)dt = -\int_a^b y(t)x'(t)dt$$

болно. Энд y тэнхлэгийн дагуу $x'(t) = 0$ байхыг бас ашиглалаа.

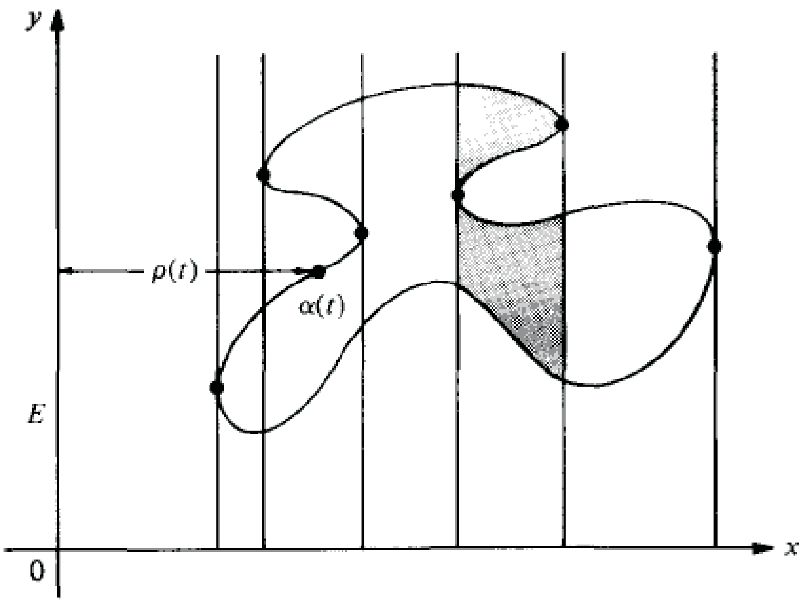
Ерөнхий тохиолдолд дээрх тэгшитгэлийг батлахын тулд муруйгаар хүрээлэгдсэн хэсгийг дээрхтэй төстэй төгсгөлөг тооны мужид хувааж болно гэдгийг харах хэрэгтэй.

Теорем 1. *C нь хавтгайн энгийн, битүү муруй ба түүний урт ℓ, талбай түүгээр хүрээлэгдэж буй дүрсийн талбай A байг. Тэгвэл*

$$\ell^2 - 4\pi A \geq 0 \quad (1.2)$$

байх ба тэнцэтгэл зөвхөн C-г тойрог үед биелэнэ.

Зураг 1.1



Баталгаа. E, E'-үүд нь хоорондоо параллель, C муруйг огтолдоггүй шулуунууд ба эдгээрийг муруйг шүргэтэл параллелээр хөдөлгөжээ. Ийм маягаар C муруйг шүргэсэн, параллель L, L' шулуунууд гаргаж бөгөөд C муруйг L, L'-ийн хоорондох зурвасаар хүрээлнэ. L, L' шулуунуудыг шүргэсэн, C-г огтолдоггүй тойргийг S^1 гэе. S^1 тойргийн төвийг O гээд O цэг дээр төвтэй, хэвтээ тэнхлэг нь L шулуунд перпендикуляр байх координатын систем авъя. C-г нумын уртаар параметрчлэн $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ хэлбэртэй ба L, L' цэгүүд дээрх шүргэлтийн цэгүүд нь $s = 0$, $s = s_1$ утгуудад харгалздаг гэе.

S^1-ийн тэгшитгэлийг

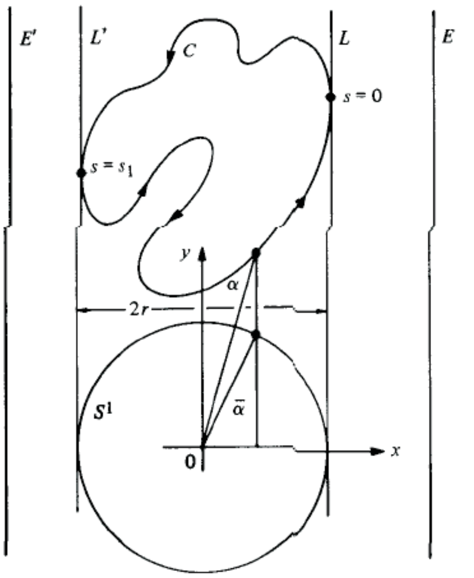
$$\overline{\alpha}(s) = (\overline{x}(s), \overline{y}(s)) = (x(s), \overline{y}(s)), \quad s \in [0, \ell]$$

хэлбэртэй байдаг гээд L, L'-ийн хоорондох зайг $2r$ гэж тэмдэглэв.

S^1 тойргийн талбайг $\overline{A}$ гэвэл (1.1) тэгшитгэлээр

$$A = \int_0^\ell xy'ds, \quad \overline{A} = \pi r^2 = -\int_0^\ell \overline{y}x'ds$$

Зураг 1.2



болох учир

$$
\begin{aligned}
A + \pi r^2 &=_{0}^{\ell} (xy' - \overline{y}x')ds \leq \int_0^{\ell} \sqrt{(xy' - \overline{y}x')^2}\,ds \\
&\leq \int_0^{\ell} \sqrt{(x^2 + \overline{y}^2)((x')^2 + (y')^2)}ds = \int_0^{\ell} \sqrt{\overline{x}^2 + \overline{y}^2}ds \\
&= \ell r
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

болно. Хоёр эерэг тооны геометр дундаж нь тэдгээрийн арифметик дунджаас бага буюу тэнцүү байдаг бөгөөд тэнцэтгэл нь эдгээр тоо хоорондоо тэнцүү байх үед биелэх учир

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{\pi r^2} \leq \frac{1}{2}(A + \pi r^2) \leq \frac{1}{2}\ell r^2 \tag{1.4}$$

буюу

$$4\pi A r^2 \leq \ell^2 r^2$$

болж эндээс (1.2) томьёо биелэнэ.

Одоо (1.2) тэнцэтгэлдээ хүрдэг гэе. Тэгвэл (1.3), (1.4) мөн тэнцэтгэлдээ хүрнэ. (1.4)-с $A = \pi r^2$ болно. Иймд $\ell = 2\pi r$ болох ба r-ийн утга L-ийн чиглэлийн сонголтоос хамаарахгүй. Мөн (1.3) тэгшитгэл дэх тэнцэтгэлээс

$$(xy' - \overline{y}x')^2 = (x^2 + \overline{y}^2)((x')^2 + (y')^2)$$

буюу

$$(xx' + \overline{y}y')^2 = 0$$

байна. Иймд

$$\frac{x}{y'} = -\frac{\overline{y}}{x'} = -\frac{\sqrt{x^2 + \overline{y}^2}}{\sqrt{(y')^2 + (x')^2}} = \pm r$$

болно. Өөрөөр хэлбэл, $x = \pm ry'$ ба r-ийн утга L-ийн сонголтоос хамаарахгүй учир сүүлийн харьцаанд x, y-ийн үүргийг сольж $y = \pm rx'$ гэж авъя. Иймд

$$x^2 + y^2 = r^2((x')^2 + (y')^2) = r^2$$

болж C муруй тойрог болно. $\square$