Лекц 13: Параметрчлэгдсэн гадаргуу

$\mathbf{E}^n$-р Евклид огторгуйг тэмдэглэе. Энэ нь $\mathbf{R}^n$ огторгуй дээр $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 1)$ суурь сонгон авч энэ огторгуй дээр $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ векторуудын скаляр үржвэрийг

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

гэж тодорхойлсон гэсэн үг юм. D нь $\mathbf{R}^2$ огторгуйн муж байг.

$$\mathbf{x} : D \to \mathbf{E}^n$$

дифференциальчлагдах буулгалтыг $\mathbf{E}^n$ дээрх **гадаргуу** гэж тодорхойлоё. Хожим бид гадаргуугийн тодорхойлолтын өөрөөр өгнө. Энд $P \in S$ гадаргуугийн цэгийн хувьд $\mathbf{x}(p) = P$ гэсэн тэмдэглэгээ хийнэ. Бид $u = (u_1, u_2) \in D$ хувьсагч ба $\mathbf{x}$ буулгалтын хувьд

$$M = (m_{ij}), \quad m_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial u_j}, i = 1, \dots, n; j = 1, 2$$

матрицыг $\mathbf{x}$ буулгалтын Якобын матриц гэж нэрлэнэ. M матрицын баганууд n-хэмжээстэй векторууд болох ба эдгээрийг

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_j}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial u_j} \right)$$

гэж тэмдэглэнэ.

$v = (v_1, \dots, v_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$ векторуудын хувьд эдгээрийн вектор үржвэрийг

$$v \times w$$

гэж тэмдэглэх ба энэ үржвэр нь $\mathbf{E}^N, N = C_n^2$ огторгуйн вектор бөгөөд энэ векторын координатууд

$$\det \begin{pmatrix} v_i & v_j \\ w_i & w_j \end{pmatrix}, i < j$$

томьёогоор олддог.

Мөн $G = (g_{ij}) = M^t M$ матрицыг дараах томьёогоор тодорхойлоё.

$$g_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \frac{\partial x_k}{\partial u_j} = \frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j}. \tag{1.1}$$

Энд

$$\det G = \left|\frac{\partial x}{\partial u_i} \times \frac{\partial x}{\partial u_i}\right|^2 = \sum_{1\leq i<j\leq n} \left(\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u_1, u_2)}\right)^2 \tag{1.2}$$

нөхцөл биелдэг бөгөөд бид үүнийг Лагранжийн адилтгал гэж нэрлэнэ.

Лемм 1. $\mathbf{x} : D \to \mathbf{E}^n$ дифференциальчлагдах буулгалт байг. D мужийн цэг болгоны хувьд дараах өгүүлбрүүд эквивалент байна. Эдгээр нь

1. $\partial\mathbf{x}/\partial u_1$, $\partial\mathbf{x}/\partial u_2$ векторууд шугаман хамааралгүй,
2. M Якобын матрицын ранк 2,
3. $\partial(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)/\partial(u_1, u_2) \neq 0$ байх $1 \leq i < j \leq n$ дугаар олдоно,
4. $\partial\mathbf{x}/\partial u_1 \times \partial\mathbf{x}/\partial u_2 \neq 0$,
5. $\det G > 0$

нөхцлүүд юм.

Баталгаа. Баталгааг гарын авлагаас харна уу. □

Тодорхойлолт 1. Хэрэв $p \in D$ цэгийн хувьд Лемм 1-ийн нөхцөл биелэж байвал S-г уг цэг дээр регуляр гэх ба D олонлогийн бүх цэг дээр S регуляр бол S-г D олонлог дээр регуляр гэнэ.

$\mathbf{x}$ функцийн координатын функцууд болох $x_1, \ldots, x_n$ функцууд бүгд D олонлог дээр r удаа тасралтгүй дифференциальчлагдах бол $\mathbf{x}$ функцийг $\mathbf{x} \in C^r(D)$ гэж тэмдэглэх бөгөөд энэ тохиолдолд мөн $S \in C^r$ гэж тэмдэглэх тохиолдол бий. Цаашид бид өөрөөр тэмдэглээгүй тохиолдолд $S \in C^r(D)$, $r \geq 1$ гэж үзнэ.

$\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^n$ нь C^r гадаргуу ба $\varphi : \widetilde{D} :\to D$ буулгалт $\widetilde{D} \subset \mathbf{R}^2$ муж дээр тодорхойлогдсон диффеоморфизм байг. $\mathbf{x}\circ\varphi$ нь мөн $\widetilde{D}$ муж дээр тодорхойлогдсон $\widetilde{S}$ гадаргуу тодорхойлох бөгөөд энэхүү параметрийн өөрчлөлтөөр өөрчлөгддөггүй гадаргуугийн чанаруудын заримыг энд дурдая. Ийм чанаруудыг гадаргуугийн параметрийн өөрчлөлтөөс хамаарахгүй чанар гэж нэрлэдэг.

φ буулгалтын Якобиан $U = (u_{ij})$ матрицын элементүүд

$$u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial u_j}$$

томьёогоор тодорхойлогдоно. Иймд φ буулгалт диффеоморфизм байхын тулд

$$\det(U) = \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2)} \neq 0$$

байна.

$S \in C^r(D)$ болон $\varphi \in C^r(\widetilde{D})$ учир $\widetilde{S}$ гадрагуу мөн C^r ангийн гадаргуу байна. Өөрөөр хэлбэл, гадаргуу C^r ангийн гадаргуу байх эсэх нь параметрийн өөрчлөлтөөс хамаарахгүй.

Мөн

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \widetilde{u}_k} = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial \widetilde{u}_k}$$

болох учир

$$\widetilde{M} = MU$$

болно. Иймд

$$\widetilde{G} = U^T G U \tag{1.3}$$

буюу

$$\det(\widetilde{G}) = \det(G)\det(U)^2 = \det(G)\left(\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2)}\right)^2 \tag{1.4}$$

байна. Иймд 1-ийн 5-р гадаргуу регуляр байх эсэх нь параметрчлэлээс хамаарахгүй.

$\triangle$ нь $\overline{\triangle} \subset D$ байх D-ийн дэд муж байг. Σ-р S гадаргуугийн $\triangle$ муж дээрх зааглал байг. Σ гадаргуугийн талбайг

$$A(\Sigma) = \int\int_{\triangle} \sqrt{\det G}\, du_1 du_2 \tag{1.5}$$

гэж тодорхойлоё.

Параметрийн өөрчлөлтийг φ, энэ буулгалтаар $\triangle$ муж $\widetilde{\triangle}$ мужид буудаг бол харгалзах $\widetilde{\Sigma}$ гадаргуугийн талбай

$$\begin{aligned} A(\widetilde{\Sigma}) &= \int\int_{\widetilde{\triangle}} \sqrt{\det \widetilde{G}}\, d\widetilde{u}_1 d\widetilde{u}_2 = \int\int_{\widetilde{\triangle}} \sqrt{\det G} \left| \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2)} \right| d\widetilde{u}_1 d\widetilde{u}_2 \\ &= \int\int_{\triangle} \sqrt{\det G}\, du_1 du_2 = A(\Sigma). \end{aligned}$$

Эндээс гадаргуугийн талбай параметрийн өөрчлөлтөөс хамаарахгүй гэсэн дүгнэлтэд хүргэнэ.

Бид энд параметрчлэлийн өөр нэгэн хэлбэрийн тухай үзье. i, j нь 1-с n-ийн хоорондох ялгаатай, бүхэл тоонууд байг. D-р x_i, x_j хавтгайн мужыг тэмдэглэе.

$$x_k = f_k(x_i, x_j), \quad k = 1, \dots, n, k \neq i, j, (x_i, x_j) \in D \tag{1.6}$$

тэгшитгэл $\mathbf{E}^n$ дээр гадаргуу дүрсэлнэ. Энэ гадаргууг **илээр тодорхойлогдсон** гадаргуу эсвэл **параметрийн биш** гадаргуу гэж нэрлэнэ. Энд (1.6) тэгшитгэлийг

$$x_i = u_1, x_j = u_2, x_k = f(u_1, u_2), k \neq i, j \tag{1.7}$$

хэлбэртэй дахин бичиж болох бөгөөд $n = 3$ тохиолдол нь $x = u_1$, $y = u_2$, $z = f(u_1, u_2)$ хэлбэртэй байна.

Гадаргуу параметрийн биш хэлбэрээр өгөгдөх нөхцлийг дараах байдлаар тодорхойлоё.

Лемм 2. *S гадаргуу ба P цэг дээр гадаргуу регуляр байг. Зааглал нь параметрийн биш гадаргуу байх P цэгийн $\triangle$ орчин оршин байна. Өөрөөр хэлбэл гадаргуугийн P цэгийн $\triangle$ орчинд дээрх зааглал Σ дээр дахин параметрчлэл оруулснаар $\widetilde{\Sigma}$ параметрийн биш гадаргуу гаргаж авч болно.*

Баталгаа. Баталгааг гарын авлагаас харна уу.

$\square$

Гадаргууг цэгийнх нь орчинд судлахын тулд уг цэгийг дайрсан, гадаргуу дээр орших муруйнуудыг авч үзэх шаардлагатай.

$$\alpha : [a, b] \to \mathbf{E}^n \tag{1.8}$$

тасралтгүй дифференциальчлагдах буулгалтыг $\mathbf{E}^n$ огторгуй дээрх **муруй** гэж нэрлээд C гэж тэмдэглэнэ. Бид мөн

$$\mathbf{x} = \alpha(t), a \leq t \leq b, \alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) \in C^1 \tag{1.9}$$

тэмдэглэгээ хийнэ.

$$\mathbf{x}'(t_0) = \alpha'(t_0) = (\alpha_1'(t_0), \dots, \alpha_n'(t_0)) \tag{1.10}$$

векторыг уг муруйн t_0 цэг дээрх **шүргэгч вектор** гэх бөгөөд $x'(t_0) \neq 0$ бол муруйг t_0 цэг дээр **регуляр** гэнэ.

Одоо $\mathbf{x}$ параметрчлэл бүхий S гадаргуу, C муруй өгчээ. Гадаргуу дээр $P \in S$ регуляр цэг авч уг цэгийн 2-р леммийн нөхцөл биелэх D орчин дээр уг гадаргуугийн зааглалыг авч үзье. Бид энэхүү зааглалыг мөн S гэж тэмдэглэе.

P цэгийг дайрсан бүх муруйнуудын олонлогийг авъя. Энд $a < t_0 < b$ тогтмол тооны хувьд C дурын муруйн хувьд $\alpha(t_0) = P$ байх t_0 тогтмол тоо олдоно гэж үзье.

C муруй болгоны хувьд D муж дээрх $\beta(t_0) = p$ байх β муруй харгалзана. Урвуугаар, D муж дээрх $\beta(t_0) = p$ байх муруй болгоны хувьд $\alpha(t) = \mathbf{x}(\beta(t))$ байх α муруй харгалзана. C муруйн P цэг дээрх шүргэгч векторыг олбол

$$\mathbf{x}'(t_0) = u_1'(t_0)\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} + u_2'(t_0)\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2} \tag{1.11}$$

болно. Энд $\partial \mathbf{x}/\partial u_1$, $\partial \mathbf{x}/\partial u_2$ тухайн уламжлалуудыг $u = p$ цэг дээр бодож байгааг анхаарна уу.

Лемм 3. S гадаргуугийн регуляр цэгийг дайрсан бүх муруйн уг цэг дээрх шүргэгч векторуудын олонлог хоёр хэмжээст вектор огторгуй үүсгэнэ.

Баталгаа. □

Өмнөх леммд тодорхойлогдсон вектор огторгуйг S гадаргуугийн $P = \beta(t_0)$ цэг дээрх шүргэгч хавтгай гэнэ. Энэ хавтгайг бид цаашид $\Pi(P)$, Π гэж тэмдэглэнэ.

Гадаргуу болгон регуляр цэг болгон дээрээ шүргэгч хавтгайтай бөгөөд энэ хавтгай параметрийн сонголтоос хамаарахгүй.

$\mathbf{x}'(t_0)$ шүргэгч векторын уртыг олбол

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}'(t_0)|^2 &= (\mathbf{x}'(t_0), \mathbf{x}'(t_0)) \\ &= \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\beta_i'(t_0)\beta_j'(t_0) \end{aligned} \tag{1.12}$$

болно. Энд $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ гэж авав. Цаашид бид тэмдэглэгээндээ $\beta(t)$ муруйг $u(t)$ муруйгаар сольж тэмдэглэнэ.

(1.9) тэгшитгэлээр тодорхойлогдох муруй өгсөн гэе. Уг муруйн хувьд

$$s(t_0) = \int_a^{t_0} |\mathbf{x}'(t)|dt \tag{1.13}$$

хэмжигдхүүн тодорхойлоё.

Дурын $a \leq t_0 \leq b$ тооны хувьд $s'(t_0) = |\mathbf{x}'(t_0)| \geq 0$ учир

$$s(t) : [a, b] \to [0, L] \tag{1.14}$$

монотон буулгалт тодорхойлогдоно. Урвуугаар, хэрэв C муруй регуляр бол $s'(t) = |\mathbf{x}'(t)| > 0$ учир (1.14) буулгалтын урвуу $t(s)$ функц дифференциальчлагдана. α болон s буулгалтуудын үржвэр буулгалт болох

$$\widetilde{\alpha}(s) = \phi \circ t(s) : [0.L] \to \mathbf{E}^n \tag{1.15}$$

буулгалт муруй тодорхойлох бөгөөд энэ муруйг C муруйн **нумын уртаарх** параметрчлэл гэж нэрлэнэ. Энэ муруйн хувьд шүргэгч векторыг олбол

$$T = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{\mathbf{x}'(t)}{s'(t)}$$

болох учир урт нь

$$\left|\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right| = \frac{|\mathbf{x}'(t)|}{s'(t)} = 1 \tag{1.16}$$

болох учир энэ вектор нэгж вектор болно.

Бид муруйг нумын уртаар параметрчлэгдсэн гээд цэг болгон дээр **муруйлтын вектор**-ыг

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = \frac{dT}{ds} \tag{1.17}$$

томьёогоор тодорхойлоё. Энд S гадаргуур C^2 ангийн гадаргуу гээд $P = \mathbf{x}(p)$ цэгийг дайрсан, S дээрх бүх C^2 ангийн регуляр муруйнуудыг сонирхоё. Бид эдгээр муруйнуудын P цэг дээрх муруйлтын векторуудыг авч үзэх болно. S гадаргуугийн P цэг дээрх шүргэгч хавтгай П-ийн ортогональ гүйцээлтийг $\Pi^\perp$ гэж тэмдэглэе. Энэ огторгуйг гадаргуугийн P цэг дээрх нормаль огторгуй гэж нэрлэдэг. P цэг дээр эхлэлтэй вектор болгон уг векторын шүргэгч хавтгай болон нормаль огторгуй хоёр дээрх проекцээр бүрэн тодорхойлогдох бөгөөд нормаль хавтгай нь $n - 2$ хэмжээстэй огторгуй юм.

$\Pi^\perp$ огторгуйн вектор болгоныг S гадаргуугийн **нормаль** вектор гэж нэрлэнэ. Нормаль вектор нь $\partial\mathbf{x}/\partial u_1$, $\partial\mathbf{x}/\partial u_2$ векторуудэд ортогональ учир

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \sum_i \frac{du_i}{ds}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u_i}$$

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = \sum_i \frac{d^2u_i}{ds^2}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} + \sum_{i,j} \frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_i \partial u_j}$$

болно. Иймд хэрэв бид

$$b_{ij}(N) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_i \partial u_j} \cdot N \tag{1.18}$$

тэмдэглэгээ оруулбал

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \cdot N = \sum_{ij} b_{ij}(N)\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds} \tag{1.19}$$

болно. Нумын уртаарх параметрчлэлийн хувьд

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = |\mathbf{x}'(t)|^2 = \sum_{ij} g_{ij} u_i'(t) u_j'(t)$$

ба $du_i/ds = (du_i/dt)/(ds/dt)$ болохыг тооцвол (1.19)-г

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = \frac{\sum_{ij} b_{ij}(N) u_i'(t_0) u_j'(t_0)}{\sum_{ij} g_{ij} u_i'(t_0) u_j'(t_0)} \tag{1.20}$$

гэж бичиж болно. Энэ илэрхийллийн хуваарьт байгаа илэрхийлэл $u'(t_0)$ шүргэгч вектороос хамаарсан квадратлаг хэлбэр болох ба энэ квадратлаг хэлбэрийн матриц $b_{ij}(N)$ нь гадаргуугийн цэг болон түүн дээрх нормаль вектор N-с хамаарна. Үүнийг уг гадаргуугийн N нормаль вектороос хамаарсан **хоёрдугаар үндсэн хэлбэр** гэж нэрлэдэг. Дээрх илэрхийлэлийн баруун гар тал бүхэлдээ C муруйн цэг дээрх шүргэгч вектороос хамаарах ба энэ нь зөвхөн тухайн шүргэгч векторын чиглэлээс хамаарна. Иймд энэ векторыг T нэгж вектороор сольж

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = k(N,T), \quad N \in \Pi^{\perp}, T \in \Pi \tag{1.21}$$

тэмдэглэгээ оруулж болно. Энэ илэрхийллийн баруун гар тал N, T-с хамаарсан функц ба үүнийг S гадаргуугийн N нормаль вектороос хамаарсан, T чиглэлийн дагуух **нормаль муруйлт** гэж нэрлэдэг. Хэрвээ бид нормаль муруйлтын N-ийг бэхлэн T-г хувирган

$$k_1(N) = \max_T k(N,T), \quad k_2(N) = \min_T k(N,T), \tag{1.22}$$

утгуудыг уг цэг дээрх S гадаргуугийн N нормаль вектороос хамаарсан **гол муруйлтууд** гэж нэрлэнэ. Мөн эдгээрийн дундаж

$$H(N) = \frac{k_1(N) + k_2(N)}{2} \tag{1.23}$$

утгыг тухайн цэг дээрх S гадаргуугийн N нормаль вектороос хамаарсан **дундаж муруйлт** гэнэ.

(1.20) тэгшитгэлийн баруун гар тал хоёр квадратлаг хэлбэрийн ноогдвор байгаа учир хамгийн бага болон хамгийн их утга нь

$$\det(b_{ij}(N) - \lambda g_{ij}) = 0 \tag{1.24}$$

тэгшитгэлийн шийд болох ба тодорхойлогчийг бодон хялбарчилбал

$$\det(g_{ij})\lambda^2 - (g_{22}b_{11}(N) + g_{11}b_{22}(N) - 2g_{12}b_{12}(N))\lambda + \det(b_{ij}(N)) = 0$$

болох учир Виетын теоремоор

$$H(N) = \frac{g_{22}b_{11}(N) + g_{11}b_{22}(N) - 2g_{12}b_{12}(N)}{2\det(g_{ij})} \tag{1.25}$$

болно.

(1.18)-р тодорхойлолтоос харвал $b_{ij}(N)$ утгууд N-с шугаман хамаарах ба (1.25)-р тэгшитгэлээс $H(N)$ утга N-с шугаман хамаарна. Иймд дурын $N \in \Pi^{\perp}$ векторын хувьд

$$H(N) = H \cdot N, \tag{1.26}$$

байх $H \in \Pi^{\perp}$ вектор цор ганц оршин байна. Энэ векторыг бид S гадаргуугийн P цэг дээрх **дундаж муруйлтын вектор** гэж нэрлэнэ. $e_1, \dots, e_{n-2}$ нь $\Pi^{\perp}$ огторгуйн ортнормаль суурь байг. (1.26) тэгшитгэлээс дундаж муруйлтын векторыг

$$H = \sum_{k=1}^{n-2} [H(e_k)]e_k \tag{1.27}$$

хэлбэрээр задлаж болно.

Тодорхойлолт 2. Хэрэв дундаж муруйлтын вектор H цэг болгон дээр мөхдөг бол S гадаргууг **минималь** гадаргуу гэнэ.

Энд H вектор бөхөх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь цэг болгон дээр нормаль вектор N болгоны хувьд $H(N) = 0$ болох ба (1.25) тэгшитгэлээс энэ нөхцөл нь

$$g_{22}b_{11}(N) + g_{11}b_{22}(N) - 2g_{12}b_{12}(N) \tag{1.28}$$

болох нь ойлгомжтой.