Лекц 11: Минимал гадаргуу.

Регуляр параметрчлэгдсэн гадаргуун дундаж муруйлт бүх цэг дээрээ тэг байдаг бол түүнийг **минимал** гэнэ. $S \subset \mathbb{R}^3$ регуляр гадаргуугийн параметрчлэл бүр нь минимал бол түүнийг минимал гадаргуу гэнэ.

$\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3,\ U \subset \mathbb{R}^2$ регуляр параметрчлэгдсэн гадаргуу байг. $D \subset U$ зааглагдсан муж ба $h : \overline{D} \to \mathbb{R}$ дифференциалчлагдах функц сонгоё. $\mathbf{x}(\overline{D})$ -ийн нормал вариац нь h -аар тодорхойлогдох ба доорх буулгалтаар өгөгдөнө.

$$\varphi : \overline{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$$

$$\varphi(u,v,t) = \mathbf{x}(u,v) + th(u,v)N(u,v), \quad (u,v) \in \overline{D},\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Энд $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ бэхлэгдсэн цэг бүрийн хувьд $\mathbf{x}^t : D \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x}^t(u,v) = \varphi(u,v,t)$$

буулгалт нь

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial u} &= \mathbf{x}_u + thN_u + th_uN,\\ \frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial v} &= \mathbf{x}_v + thN_v + th_vN\end{aligned}$$

байх параметрчлэгдсэн гадаргуу байна.

Хэрэв $\mathbf{x}^t$ -ын нэгдүгээр үндсэн хэлбэрийн коэффициентүүдийг E^t, F^t, G^t -ээр тэмдэглэвэл

$$\begin{aligned}E^t &= E + th(<\mathbf{x}_u, N_u> + <\mathbf{x}_u, N_u>) + t^2h^2 <N_u, N_u> + t^2h_uh_u,\\ F^t &= F + th(<\mathbf{x}_u, N_v> + <\mathbf{x}_v, N_u>) + t^2h^2 <N_u, N_v> + t^2h_uh_v,\\ G^t &= G + th(<\mathbf{x}_v, N_v> + <\mathbf{x}_v, N_v>) + t^2h^2 <N_v, N_v> + t^2h_vh_v.\end{aligned}$$

Мөн

$$\begin{aligned}&<\mathbf{x}_u, N_u> = -e,\\ &<\mathbf{x}_u, N_v> + <\mathbf{x}_v, N_u> = -2f,\\ &<\mathbf{x}_v, N_v> = -g\end{aligned}$$

ба дундаж муруйлт нь

$$H = \frac{1}{2}\frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}$$

болохыг ашиглавал

$$\begin{aligned} E^tG^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + R \\ &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R, \end{aligned}$$

энд $\lim_{t\to 0} \dfrac{R}{t} = 0$ байна.

Хэрэв ε нь хангалттай бага бол $\mathbf{x}^t$ нь регуляр параметрчлэгдсэн гадаргуу болно. Цаашид $\mathbf{x}^t(\overline{D})$ -ын талбайг $A(t)$ гэе.

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{\overline{D}} \sqrt{E^2G^2 - (F^t)^2}dudv \\ &= \int_{\overline{D}} \sqrt{1 - 4thH + \overline{R}} \cdot \sqrt{EG - F^2}dudv, \end{aligned}$$

ба энд $\overline{R} = \dfrac{R}{EG - F^2}$ юм. Хэрэв нь ε бага тоо бол A нь дифференциалчлагдах функц болох бөгөөд түүний $t = 0$ цэг дээрх уламжлал нь

$$A'(0) = -\int_{\overline{D}} 2hH\sqrt{EG - F^2}dudv$$

болох нь ойлгомжтой.

Өгүүлбэр 1. $\mathbf{x} : U \to R^3$ регуляр параметрчлэгдсэн гадаргуу ба $D \subset U$ нь хилтэй муж байг. Тэгвэл $\mathbf{x}$ минимал байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь бүх D ба бүх $\mathbf{x}(\overline{D})$ -ын нормал вариацын хувьд $A'(0) = 0$ байх явдал юм.

Иймд $\mathbf{x}$ минимал гадаргуугийн $\mathbf{x}(\overline{D})$ хязгаарлагдсан муж нь $\mathbf{x}(\overline{D})$-ийн нормал вариацуудын талбайн функцийн сэжигтэй цэг юм. Гэхдээ сэжигтэй цэг нь минимумын цэг байх албагүй учир энэхүү нэршил нь тийм ч сайн нэршил биш. Энэхүү нэршилийг анх Лагранж 1760-аад онд оруулж ирсэн.

Минимал гадаргуу нь метал утсан хүрээг савангийн уусмалд дүрэхэд хүрээнд наалдах хөөсөн гадаргуутай холбоотой байдаг. Энд үүсэж байгаа хөөсөн гадаргуу нь регуляр цэгийнхээ орчинд минимал гадаргуу байдаг. Энэ асуудлыг анх 1850-иад оны үед Бельгийн математикчид Плато хөндсөн бөгөөд математикийн түүхэнд Платогийн бодлого гэдэг нэрээр үлдсэн юм. Түүний бодлогыг томьёолбол "регуляр, битүү муруй

C болгоны хувьд түүгээр хүрээлэгдсэн, хамгийн бага тамбайтай S гадаргуу оршин байхыг батал"болно. Энэхүү асуудлыг Duglas, Rado нар 1930 онд тус тусдаа батласан.

Регулряр, параметрчлэгдсэн гадаргууны хувьд бид $\mathbf{H} = HN$ векторыг **дундаж муруйлтын** вектор гэж нэрлэнэ. Энэ векторын геометр утгыг тайлбарлая. Хэрэв бид $h = H$ гэж авбал энэ вариацын хувьд

$$A'(0) = -2 \int_{\overline{D}} < \mathbf{H}, \mathbf{H} > \sqrt{EG - F^2} dudv < 0$$

байна. Энэ нь хэрэв бид $\mathbf{x}(\overline{D})$-г $\mathbf{H}$-Ийн дагуу хувиргавал талбай буурна гэсэн үг.

Дундаж муруйлтын векторын өөр нэг геометр утгыг энд тайлбарлая. Хэрэв $< \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u >=< \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v >$ ба $< \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v >= 0$ бол $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ регуляр параметрчлэгдсэн гадаргууг *изотермал* гэнэ.

Өгүүлбэр 2. Регуляр параметрчлэгдсэн гадаргуу бөгөөд изотермал байг. Тэгвэл

$$\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 2\lambda^2 \mathbf{H}$$

байна. Энд $\lambda^2 =< \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u >=< \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v >$.

$f : U \to \mathbb{R},\ U \subset \mathbb{R}^2$ функцын Лапласын оператор нь

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \quad (u, v) \in U$$

гэж тодорхойлогддог. Хэрэв $\triangle f = 0$ бол f -ийг U дээр *гармоник* гэдэг.

Мөрдлөгөө. $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ параметрчлэгдсэн гадаргуу бөгөөд изотермал байг. Тэгвэл $\mathbf{x}$ минимал байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь x, y, z координатын функцүүд гармоник байх явдал юм.

Жишээ 1.

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cosh v \cdot \cos u, a \cosh v \cdot \sin u, av),$$

$0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty$ тэгшитгэлээр өгөгдөх катеноидийг авч үзье. Энэ нь z тэнхлэгийг тойруулан $y = a \cosh(\frac{z}{a})$ (катенари муруй)-г эргүүлсэн эргүүлэлтийн гадаргуу юм.

Энэ гадаргууг минимал гадаргуу болно гэдгийг шалгая.

$$\begin{aligned} E =< \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u > &= a^2\cosh^2 v \cdot \sin^2 u + a^2\cosh^2 v \cdot \cos^2 u + 0 = a^2\cosh^2 v, \\ G =< \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v > &= a^2\sinh^2 v \cdot \cos^2 u + a^2\sinh^2 v \cdot \sin^2 u + a^2 \\ &= a^2(\sinh^2 v + 1) = a^2\cosh^2 v \end{aligned}$$

буюу $E = G = a^2\cosh^2 v$ ба

$$\begin{aligned} F =< \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v >=< (- a\cosh v \cdot \sin u, a\cosh v, \cos u, 0), \\ (-a\sinh v \cdot \cos u, -a\sinh v \cdot \sin u, a) >= 0 \end{aligned}$$

учраас x изотермал байна. Өмнөх өгүүлбэрээр,

$$\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 2a^2\cosh^2 v \cdot H$$

байх ёстой.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = (-a\cosh v \cdot \cos u, -a\cosh v \cdot \sin u, 0) \\ + (a\cosh v \cdot \cos u, a\cosh v \cdot \sin u, 0) = 0 \end{aligned}$$

буюу $H = 0$ болж катеноид нь минимал гадаргуу боллоо.

Теорем 1. Бүх эргүүлэлтийн гадаргуунуудаас зөвхөн катеноид л минимал гадаргуу болно.

Жишээ 2. (Helicoid)

$$\mathbf{x}(u, v) = (a\sinh v \cdot \cos u, a\sinh v \cdot \sin u, au)$$

тэгшитгэлээр өгөгдсөн хеликоид нь минимал гадаргуу болохыг шалгая.

$$\begin{aligned} E =< \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u >= a^2\sinh^2 v \cdot \sin^2 u + a^2\sinh^2 v \cdot \cos^2 u + a^2 = a^2\cosh^2 v \\ G =< \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v >= a^2\cosh^2 v \cdot \cos^2 u + a^2\cosh^2 v \cdot \sin^2 u + 0 = a^2\cosh^2 v \end{aligned}$$

буюу $E = G = a^2\cosh^2 v$, мөн

$$\begin{aligned} F =< \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v >=< (-a\sinh v \cdot \sin u, a\sinh v \cdot \cos u, a), \\ (a\cosh v \cdot \cos u, a\cosh v \cdot \sin u, a) >= 0. \end{aligned}$$

Эндээс $\mathbf{x}$ изотермал болж

$$\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 2a^2\cosh^2 v \cdot H$$

байх ёстой.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} &= (-a\sinh v \cdot \cos u, -a\sinh v \cdot \sin u, 0) \\ &\quad + (a\sinh v \cos u, a\sinh v \cdot \sin u, 0) = 0\end{aligned}$$

учир $H = 0$ гэдгээс хеликоид нь минимал гадаргуу байна.

Теорем 2. Шулуусгагдах гадаргуунууд дотроос зөвхөн хеликоид ба хавтгай хоёр л минимал гадаргуу болж чадна.

Жишээ 3. (Enneper's minimal surface)

$$\mathbf{x}(u,v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

гэж тодорхойлогдох параметрчлэгдсэн гадаргууг Enneper ийн гадаргуу гэх бөгөөд үүнийг минимал болохыг шалгая болно. зураг 3-44

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (1 - u^2 + v^2, 2vu, 2u), \\ \mathbf{x}_v &= (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v)\end{aligned}$$

учраас

$$\begin{aligned}< \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u > &= (1 - u^2 + v^2)^2 + 4v^2u^2 + 4u^2 \\ &= u^4 + v^4 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2 + 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}< \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v > &= 4u^2v^2 + (1 - v^2 + u^2)^2 + 4v^2 \\ &= u^4 + v^4 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2 + 1\end{aligned}$$

буюу

$$< \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u > = < \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v >$$

байна. Мөн

$$< \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v > = 2uv - 2u^3v + 2uv^3 + 2uv - 2uv^3 + 2u^3v - 4uv = 0$$

тул $\mathbf{x}$ изотермал болно.

$$\begin{aligned}\triangle x(u,v) &= -2u + 2u = 0, \\ \triangle y(u,v) &= 2v - 2v = 0, \\ \triangle z(u,v) &= 2 - 2 = 0\end{aligned}$$

тул x, y, z координатын функцүүд нь гармоник байна. Иймд дээрх мөрдлөгөө ёсоор Enneper ийн гадаргуу минимал байна.

Дараагийн жишээг бид минимал гадаргуу ба комплекс хувьсагчийн аналитик функцийн хоорондох хамаарлыг ашиглан батална.

$\xi = u + iv,\ \xi \in C,\ (u,v) \in \mathbb{R}^2$ гэе.

$f : U \to C,\ U \subset \mathbb{C}$ функц

$$f(\xi) = f_1(u,v) + if_2(u,v)$$

гэж бичигддэг бөгөөд f_1, f_2 функцүүд доорх хоёр нөхцөлийг хангадаг бодит функцүүд бол f -ийг аналитик функц гэнэ. Үүнд:

1. Нэгдүгээр эрэмбийн тухайн уламжлалууд нь тасралтгүй.

2. Гаусс-Риманы тэгшитгэлүүд

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial v}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial v} = -\frac{\partial f_2}{\partial u}$$

   биелдэг.

$\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3,\ U \subset \mathbb{R}^2$ нь регуляр гадаргуу ба $\mathbf{x}$ -ын компонентууд болох x, y, z функцүүдийн хувьд

$$\begin{aligned}\varphi_1(\xi) &= \frac{\partial x}{\partial u} - i\frac{\partial x}{\partial v},\\ \varphi_2(\xi) &= \frac{\partial y}{\partial u} - i\frac{\partial y}{\partial v},\\ \varphi_3(\xi) &= \frac{\partial z}{\partial u} - i\frac{\partial z}{\partial v}\end{aligned}$$

дүрмээр $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ гэсэн комплекс хувьсагчийн функцүүдийг тодорхойлъё.

Лемм 1. $\mathbf{x}$ изотермал байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0$ байна. Хэрэв энэ нөхцөл биелдэг бол $\mathbf{x}$ минимал гадаргуу байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ функцүүд аналитик байх явдал юм.

Жишээ 4. (Scherk's minimal surface) Шеркийн минимал гадаргуу

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(\arg\frac{\xi+i}{\xi-i}, \arg\frac{\xi+1}{\xi-1}, \log\left|\frac{\xi^2+1}{\xi^2-1}\right|\right), \quad \xi \neq \pm 1, \xi \neq \pm i$$

гэж тодорхойлогдох бөгөөд энд $\xi = u + iv$, $\arg\xi$ нь ξ -ийн бодит тэнхлэгтэй үүсгэх өнцгийн хэмжээ. Одоо $\mathbf{x}$ -ын компонент функцүүдийг u, v -ээр илэрхийлье. Үүний тулд $\arg\xi = \arctan\dfrac{v}{u}$ гэдгийг санах хэрэгтэй. $\mathbf{x}$ -ийн компонент функцүүдийг тооцоолбол,

$$
\begin{aligned}
\arg\frac{\xi+i}{\xi-i} &= \arg\left(\frac{u+i(v+1)}{u+i(v-1)}\cdot\frac{u-i(v-1)}{u+i(v-1)}\right)\\
&= \arg\frac{u^2-iu(v-1)+iu(v+1)+v^2-1}{u^2+(v-1)^2}\\
&= \arg\left(\frac{u^2+v^2-1}{u^2+(v-1)^2}+i\frac{2u}{u^2+(v-1)^2}\right)\\
&= \arctan\frac{2u}{u^2+v^2-1},\\
\arg\frac{\xi+1}{\xi-1} &= \arg\left(\frac{u+1+iv}{u-1+iv}\frac{u-1-iv}{u-1-iv}\right)\\
&= \arg\frac{u^2-1-iv(u+1)+iv(u-1)+v^2}{(u-1)^2+v^2}\\
&= \arg\left(\frac{u^2+v^2-1}{(u-1)^2+v^2}+i\frac{-2v}{(u-1)^2+v^2}\right)\\
&= \arctan\frac{-2v}{u^2+v^2-1},\\
\log\left|\frac{\xi^2+1}{\xi^2-1}\right| &= \log\frac{|u^2+2iuv-v^2+1|}{|u^2+2iuv-v^2-1|}\\
&= \log\frac{\sqrt{(u^2-v^2+1)^2+4u^2v^2}}{\sqrt{(u^2-v^2-1)^2+4u^2v^2}}\\
&= \frac{1}{2}\log\frac{(u^2-v^2+1)^2+4u^2v^2}{(u^2-v^2-1)^2+4u^2v^2}
\end{aligned}
$$

болох учраас

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1 = \frac{\partial x}{\partial u} - i\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{2}{1+\xi^2},\\
&\varphi_2 = -\frac{2i}{1-\xi^2},\\
&\varphi_3 = \frac{4\xi}{1-\xi^4}
\end{aligned}
$$

болно.

$$\begin{aligned}\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2 &= \frac{4}{(1+\xi^2)^2}-\frac{4}{(1-\xi^2)^2}+\frac{16\xi^2}{(1-\xi^4)^2}\\ &= \frac{4-8\xi^2+4\xi^4-4-8\xi^2-4\xi^4+16\xi^2}{(1-\xi^4)^2}=0\end{aligned}$$

ба φ_1, φ_2, φ_3 аналитик функцүүд тул $\mathbf{x}$ минимал гадаргуугийн параметрчлэл болно.