Лекц 10: Шулуусгагдах гадаргуу.

$\{\alpha(t), w(t)\}$ шулуунуудын дифференциальчлагдах, нэг- параметрийн бүл гэж $t \in I$ утга болгонд$\alpha(t) \in \mathbf{R}^3$ цэг, $w(t) \in \mathbf{R}^3$ тэг биш вектор харгалзуулсан харгалзаа ба $\alpha(t)$, $w(t)$-үүд t-с дифференциальчлагдах хамааралтай өгөгдсөн тохиолдолд хэлдэг. $t \in I$ утганд $\alpha(t)$-г дайрсан, $w(t)$-тэй параллель шулууныг бүлийн t дэхь утга гэж нэрлэдэг.

$\{\alpha(t), w(t)\}$ шулуунуудын нэг-параметр бүл өгөгдсөн үед

$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + vw(t), \quad t \in I, \ v \in \mathbb{R}$$

параметрчлэгдсэн гадаргууг $\{\alpha(t), w(t)\}$ бүлээр үүсгэгдсэн *шулуусгагдах гадаргуу* гэнэ. L_t шулуунуудыг *байгуулагч*, $\alpha(t)$ муруйг $\mathbf{x}$ гадаргуугийн *чиглүүлэгч (директрис)*, $\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_v = 0$ байх (t, v) цэгүүдийг $\mathbf{x}$ -ын онцгой цэгүүд гэнэ.

Жишээ 1. Шулуусгагдах гадаргуунуудын хялбар нэг жишээ нь цилиндр юм. Цилиндр гадаргуу нь $\alpha(I)$ муруй P хавтгайд агуулагдах ба $w(t)$ чиглэл $\mathbb{R}^3$ дэх бэхлэгдсэнд чиглэлтэй параллель тохиолдолд үүсгэнэ.

Жишээ 2. Конус мөн $\{\alpha(t), w(t)\}$, $t \in I$ бүлээр үүсгэгдсэн шулуусгагдах гадаргуу болно. Энд $\alpha(I) \subset P$ ба L_t байгуулагчууд нь бүгд P хавтгайд оршдоггүй бэхлэгдсэн p цэгийг дайрах тохиолдолд конус гадаргуу үүснэ.

Жишээ 3. S^1 нь xy хавтгай дээрх $x^2 + y^2 = 1$ нэгж тойрог байг. Мөн $\alpha(s)$ нь түүний нумын уртаар параметрчилсэн параметрчлэл байг. s параметр бүрийн хувьд $w(s) = \alpha'(s) + e_3$ байг. Энд e_3 нь z тэнхлэгтэй ижил чиглэлтэй нэгж вектор. Тэгвэл

$$\mathbf{x}(s, v) = \alpha(s) + v(\alpha'(s) + e_3)$$

нь шулуусгагдах гадаргуу болно.

Үүнийг

$$\mathbf{x}(s, v) = (\cos s - v \sin s, \sin s + v \cos s, v)$$

гэж бичиж чадах бөгөөд

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 + v^2 - v^2 = 1$$

тэгшитгэлийг хангаж байна. Иймд $\mathbf{x}$ -ийн мөр нь эргүүлэлтийн гиперболоид болох нь харагдаж байна.

Энд бид $w(s) = \alpha'(s) + e_3$ гэж авсан ч дээрхтэй ижил гадаргуу гарган авч болно гэдгийг харж болно. Энэ нь гиперболоид нь хоёр байгуулагчтай гэдгийг харуулж байна.

Бид $|w(t)| = 1$, $t \in I$ гэж үзэхэд асуудлын ерөнхийлөл алдагдахгүй. Мөн цаашид дүгнэлт хийхийн тулд бүх $t \in I$ параметрын хувьд $w'(t) \neq 0$ байдаг гэе. $w'(t)$-ийн тэг байдаг утгууд тусгаарлагдсан байгаа тохиолдолд бид гадаргуугаа $w'(t) \neq 0$ байх хэсгүүдэд хуваан авч онолоо хөгжүүлэх боломжтой. Харин тусгаарлагдаагүй тохиолдолд асуудал хүнд болох ба энд энэ тохиолдлыг авч үзэхгүй.

$w'(t) \neq 0$ нөхцөл нь $\mathbf{x}$-г цилиндр биш гадаргуу гэж үзэхтэй ижил.

Өөрөөр зааснаас бусад тохиолдолд бид

$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + vw(t) \tag{1.1}$$

гадаргууг цилиндр биш гэж үзнэ. Мөн $|w(t)| \equiv 1$ нөхцлөөс бүх $t \in I$ параметрын хувьд $< w(t), w'(t) >= 0$ чанар мөрдөн гарна.

Эхлээд бид $\mathbf{x}$ гадаргуу дээр орших $< \beta'(t), w'(t) >= 0$, $t \in I$ байх $\beta(t)$ параметрчлэгдсэн муруйг олох зорилт тавья. Өөрөөр хэлбэл, $u = u(t)$ бодит функцын хувьд

$$\beta(t) = \alpha(t) + u(t)w(t) \tag{1.2}$$

байдаг гэе. Иймд

$$\beta' = \alpha' + u'w + uw'$$

болох учир $< w, w' >= 0$ гэдгээс

$$0 =< \beta', w' >=< \alpha', w' > +u < w', w' >$$

буюу

$$u = -\frac{< \alpha', w' >}{< w', w' >} \tag{1.3}$$

болно. Иймд бид (1.2), (1.3) тэгшитгэлээр $\beta(t)$ муруйг тодорхойлж чадна. Энд β муруйн сонголт шулуусгагдах гадаргуун директрис буюу α-с хамаардаггүй гэдгийг баталж болдог. (ДоКармогийн номыг үз!)

β муруйг **хязгаарлалтын шугам** гэж нэрлэх ба уг муруйн цэгүүдийг **төвийн цэгүүд** гэж нэрлэдэг.

Бодлого 1. Эргүүлэлтийн гиперболоидын хязгаарлалтын шугам ямар муруй байх вэ?

Одоо бид хязгаарлалтын шугамаа гадаргуун директрис болгон авч гадаргуун параметрчлэлээ

$$\mathbf{x}(t, u) = \beta(t) + u(t)w(t) \tag{1.4}$$

хэлбэртэй гэе.

Энэ тохиолдолд
$$\mathbf{x}_t = \beta' + uw', \quad \mathbf{x}_u = w$$
мөн
$$\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_u = \beta' \times w + uw' \times w$$
байна.

$< w', w >= 0$, $< w', \beta' >= 0$ учир $\lambda = \lambda(t)$ функцийн хувьд $\beta' \times w = \lambda w'$ гэе. Тэгвэл
$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_u|^2 &= |\lambda w' + uw' \times w|^2 \\ &= \lambda^2 |w'|^2 + u^2 |w'|^2 = (\lambda^2 + u^2)|w'|^2 \end{aligned}$$
болно. Иймд (1.4) тэгшитгэлээр өгөгдөх шулуусгагдах гадаргуугийн онцгой цэгүүд $u = 0$ буюу хязгаарлалтын шугам дагуу байх ба эдгээр зөвхөн $\lambda(t) = 0$ тохиолдолд гарч ирэх боломжтой. Мөн
$$\lambda = \frac{(\beta', w, w')}{|w'|^2}$$
байна.

(1.4) гадаргуун регуляр цэг дээрх Гауссын муруйлтыг тооцоолоё.
$$\mathbf{x}_{tt} = \beta'' + uw'', \quad \mathbf{x}_{tu} = w', \quad \mathbf{x}_{uu} = 0$$
учир хоёрдугаар үндсэн хэлбэрийн коэффициентүүд
$$g = 0, \quad f = \frac{(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{ut})}{|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_u|} = \frac{(\beta', w, w')}{|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_u|^2}$$
болно. $g = 0$ учир e-г олох шаардлагагүй. Иймд Гауссын муруйлт
$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{\lambda^2 |w'|^4}{(\lambda^2 + u^2)^2 |w'|^4} = -\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + u^2)^2} \tag{1.5}$$
болно.

Эндээс харвал, шулуусгагдах гадаргуугийн Гауссын муруйлт $K \leq 0$ байх бөгөөд хязгаарлалтын шугамыг сингуляр цэгээр огтлох байгуулагчийн дагуу л K-ийн утга тэг байна.

(1.5) тэгшитгэлээс төвийн цэгүүдийн геометр утгыг тайлбарлах боломжтой. Байгуулагчийн төвийн цэгээс бусад цэг нь гадаргуугийн регуляр цэг болно. Хэрэв $\lambda \neq 0$ бол $K = K(u)$ функц байгуулагчийн дагуу тасралтгүй функц байх ба (1.5) тэгшитгэлээр $|K(u)|$-ийн хамгийн их утгаа авах цэгүүд нь төвийн цэгүүд байна.

Мөн байгуулагч дээр орших, өгсөн төвийн цэгтэй тэгш хэмтэй байх цэгүүд дээр K-ийн утга ижил байна.

$\lambda(t)$ функцийг $\mathbf{x}$ гадаргуун тархалтын параметр гэж нэрлэдэг. Нормаль вектор орон

$$N(t,u) = \frac{\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_u}{|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_u|} = \frac{\lambda w' + u w' \times w}{\sqrt{\lambda^2 + u^2}|w'|}$$

болно. Нөгөө талаас $\lambda \neq 0$ бол

$$N(t,0) = \frac{w'}{|w'|}$$

учир $N(t,u)$ болон $N(t,0)$-ийн хоорондох өнцгийг θ гэвэл

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{u}{\lambda} \tag{1.6}$$

болно. Иймд

Өгүүлбэр 1. θ нь байгуулагч дээрх цэг ба энэ байгуулагчын төвийн цэг дээрх нормалуудын хоорондох өнцөг байг. Тэгвэл $\mathrm{tg}\theta$ нь эдгээр хоёр цэгийн хоорондох зайтай пропорциональ байх бөгөөд пропорционалын коэффициент нь тархалтын параметрийн урвуутай тэнцэнэ.

Жишээ 4.

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = kxy,\ k \neq 0\}$$

гиперболлог параболоидыг шулуусгагдах гадаргуу гэж харуулъя. Үүний тулд $t \in S,\ t \neq 0$ бүрийн хувьд $y = \dfrac{z}{tk},\ x = t$ шулуунууд S гадаргуу дээр оршино гэдгийг харуулж болно. Хэрэв энэ шулуунуудын бүлийн $z = 0$ хавтгайтай огтлолцох огтлолцолыг олвол, $x = t,\ y = 0,\ z = 0$ муруй гарна. Энэ муруйг директрис болгон авч, $w(t)$ чиглэлийг $y = \dfrac{z}{tk},\ x = t$ шулуунуудад параллель байхаар авбал,

$$\alpha(t) = (t,0,0), \qquad w(t) = \left(0, \frac{1}{k}, t\right)$$

болно.

Энэ гадаргуу

$$\mathbf{x}(t,v) = \alpha(t) + v \cdot w(t) = \left(t, \frac{v}{k}, vt\right),\ t, v \in \mathbb{R}$$

хэлбэрийн шулуусгагдах гадаргуу тодорхойлох ба энэ нь S гадаргуутай давхцана.

$\alpha'(t) = (1,0,0)$ учир α-ийн хязгаарлалтын шугам нь α өөрөө байна. Энэ тохиолдолд тархалтын параметр

$$\lambda = \frac{1 + k^2 t^2}{k^2}$$

мөн $\mathrm{tg}\theta = tk$ байна.