Лекц 1: Параметрчлэгдсэн муруй

Тодорхойлолт 1. $\mathrm{I} = (a, b)$ бодит тоон интервал, $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbf{R}^3$ буулгалт байг. α буулгалт дифференциальчлагдах буулгалт бол үүнийг параметрчлэгдсэн муруй гэнэ.

$t \in \mathrm{I}$ параметрийн хувьд $\alpha(t) \in \mathbf{R}^3$ учир координатуудыг нь $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ гэж тэмдэглэж болох бөгөөд α дифференциальчлагдах гэдэг нөхцөл нь $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ координатын функцүүд бүгд дифференциальчлагдана гэдэгтэй ижил. Энд бид $t \in \mathrm{I}$ утгыг параметр гэж нэрлэх бөгөөд $\mathrm{I} = (-\infty, \infty)$ байх боломжтой.

$\mathbf{R}^3$ вектор огторгуйд тодорхойлогдох $\alpha'(t = (x'(t), y'(t), z'(t))$ векторыг өгсөн муруйн $\alpha(t)$ цэг дээрх шүргэгч вектор гэнэ. $\alpha(I)$-г муруйн мөр гэнэ.

Жишээ 1. $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), t \in \mathbf{R}$ муруйг спирал буюу ороомог муруй гэнэ. Энэ муруйн $\alpha(t)$ цэг дээрх шүргэгч вектор нь $\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$ хэлбэртэй байна.

Жишээ 2. $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ нь хавтгайн муруй тодорхойлно. Өмнөхтэй ижлээр дурын цэг дээрх шүргэгч векторыг олох боломжтой бөгөөд $\alpha'(t) = (3t^2, 2t)$ болно. Энд $\alpha'(0) = (0, 0)$ буюу $\alpha(0)$ цэг дээр шүргэгч вектор тодорхойлогдохгүй.

Жишээ 3. $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ хавтгайн муруйн хувьд α функц $t = 2$, $t = -2$ цэгүүд дээр ижил утга авна. Харин энэ тохиолдолд

$$\begin{aligned} \alpha'(2) &= (8, 4) \\ \alpha'(-2) &= (8, -4) \end{aligned}$$

болох учир шүргэгчүүд нь ижил биш.

Жишээ 4. Зарим муруйн тэгшитгэл өөр ч мөр нь ижил байх тохиолдол байдаг. $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $\beta(t) = (\cos 2t, \sin(2t)$ функцүүд $t \in (0, 2\pi)$ параметрүүдийн хувьд ижил мөртэй муруйнууд тодорхойлно. Гэхдээ эдгээрийн шүргэгч векторууд харгалзан

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (-\sin t, \cos t) \\ \beta'(t) &= (-2 \sin t, 2 \cos t) \end{aligned}$$

гэж олдох учир векторууд аль ч цэг дээрээ ялгаатай.

1.1 Регуляр муруй, муруйн урт

$\alpha : \mathrm{I} \to \mathbf{R}^3$ муруй t параметрийн хувьд $\alpha'(t) \neq 0$ бол бид $\alpha(t)$-г дайрсан $\alpha'(t)$ чиглүүлэгчтэй шүргэгч шулуун татаж чадна. Муруйн дифференциал шинж чанарыг судлахад шүргэгч шулуун оршин байх эсэх нь чухал ач холбогдолтой байдаг. Бид $\alpha'(t) = 0$ байх t-г сингуляр цэг гэж нэрлэн, цаашид муруйгаа сингуляр цэггүй интервал дээр авч үзнэ.

Тодорхойлолт 2. $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbf{R}^3$ муруй t параметр бүрийн хувьд $\alpha'(t) \neq 0$ бол $\alpha(t)$-г регуляр муруй гэнэ.

Цаашид өөрөөр тодорхойлсноос бусад үед $\alpha(t)$-г регуляр муруй гэж авах болно.

$\alpha : \mathrm{I} \to \mathbf{R}^3$ муруй авъя. $t_0, t \in \mathrm{I}$ цэгүүдийн хувьд $\alpha(t_0)$ цэгээс $\alpha(t)$ цэгийн хоорондох муруйн уртыг

$$s(t) = \int\limits_{t_0}^{t} |\alpha'(t)| dt$$

томьёогоор тодорхойлдог. Энд $\alpha'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ буюу шүргэгч векторын урт юм.

Регуляр муруйн хувьд $\alpha'(t) \neq 0$ учир $s = s(t)$ функц дифференциальчлагдах бөгөөд

$$\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|$$

болно. t параметр муруйн урттай тэнцүү байх тохиолдол байдаг. Энэ үед $ds/dt = 1 = |\alpha'(t)|$ учир шүргэгч вектор нь нэгж урттай байна. Урвуугаар, $|\alpha'(t)| = 1$ бол

$$s(t) = \int\limits_{t_0}^{t} 1 dt = t - t_0$$

болно. Цаашдын тооцооллыг хялбар болгох үүднээс бид муруйн параметрчлэлийг $t = s$ байхаар авна. Энэ тохиолдолд бид муруйг **нумын уртаар параметрчлэгдлээ** гэнэ. Гэхдээ энэ нь тийм ч чухал шаардлагатай алхам биш гэдгийг хожим үзнэ.

Жишээ 5. Өмнө үзсэн $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in I$ ороомог муруйг дахин авъя. Дурын цэг дээрх шүргэгч векторыг олбол

$$\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$$

болно. $\alpha(t_0)$, $\alpha(t)$ цэгүүдийг холбосон нумын уртыг олбол

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{a^2+b^2}dt = \sqrt{a^2+b^2}(t-t_0)$$

болно. Тооцооллыг хялбарчлах үүднээс $t_0 = 0$ гэж авбал $t = s/\sqrt{a^2+b^2}$ болох учир анхны муруйн параметрчлэл

$$\alpha(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

болж өөрчлөгдөнө. Энэ параметрчлэл нумын уртаарх параметрчлэл болохыг хялбархан шалгаж болно.

$\alpha(s)$ муруйн нумын уртан параметрчлэл өгсөн тохиолдолд $\beta(-s) = \alpha(s)$ гэж шинэ муруй тодорхойлж болно. Энэ $\beta : (-b, -a) \to \mathbf{R}^3$ муруй нь α муруйтай ижил мөртэй байх боловч чиглэл нь өөр байна. Энэ тохиолдолд бид ориентацийг өөрчилж байна гэж ярьдаг.

1.2 Нумын уртаар параметрчлэгдсэн муруйн орчны онол

Одоо $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbf{R}^3$ нумын уртаар параметрчлэгдсэн муруй авъя. $\alpha'(s)$ шүргэгч вектор нэгж урттай учир түүний уламжлал $\alpha''(s)$-ийн норм нь тухайн цэгийн орчинд муруйн шүргэгч хэрхэн өөрчлөгдөж байгааг заана. Өөрөөр хэлбэл, тухайн цэгийн орчинд муруйн шүргэгч хэр зэрэг хазайж (иймд муруйж) байгааг $|\alpha''(s)|$ утгын тусламжтай тодорхойлж болно.

Тодорхойлолт 3. $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbf{R}^3$ нумын уртаат параметрчлэгдсэн муруйн $k(s) := |\alpha''(s)|$ утгыг энэ муруйн s цэг дээрх **муруйлт** гэнэ. (муруйлт–curvature–крывизна)

Жишээ 6. $u, v \in \mathbf{R}^3$, $|u| = 1$ тогтмол векторуудын хувьд шулууны вектор тэгшитгэл $\alpha(s) = us + v$ хэлбэртэй байдаг гэе. $\alpha'(s) = u$ болох учир $\alpha''(s) = 0$ болно. Өөрөөр хэлбэл шулууны ямарч цэг дээрх шүргэгч вектор нь цэгийнхээ орчинд (хазайж) өөрчлөгдөхгүй. Иймээс шулуун аль ч цэгийнхээ орчинд муруйхгүй.

Урвуугаар, $|\alpha''(s)| = 0$ бол $\alpha'(s) = u$, $u = const$ вектор олдох учир $\alpha(s) = us + v$ болж муруйлт нь 0 байх муруй бол шулууны нэг хэсэг буюу интервал, шулуун байна.

$\beta(-s) = \alpha(s)$ ориентацын өөрчлөлтөөр

$$\frac{d\beta(-s)}{ds} = -\frac{d\alpha(s)}{ds}$$

болж шүргэгчийн чиглэл өөрчлөгдөнө. Харин энэ тохиолдолд $|\beta''(-s)| = |\alpha''(s)|$ болохыг хялбархан шалгаж болно. Өөрөөр хэлбэл, муруйлт нь ориентацын өөрчлөлтөөр инвариант байна.

$k(s) \neq 0$ үед $\alpha''(s) = k(s) \cdot n(s)$ байх нэгж урттай $n(s)$ векторыг нэг утгатай тодорхойлж болно. $(\alpha'(s), \alpha'(s)) = 1$ илэрхийлллээс s-р уламжлал авбал $(\alpha''(s), \alpha'(s)) = 0$ болох учир $\alpha''(s)$ вектор шүргэгчид перпендикуляр байна. Иймд $n(s)$ мөн $\alpha'(s)$ шүргэгч векторт перпендикуляр болох учир $n(s)$ векторыг муруйн **нэгж нормаль** вектор гэнэ. Нэгж нормаль болон шүргэгч вектороор тодорхойлогдох хавтгайг муруйн **шахагч хавтгай** гэнэ.

$k(s) = 0$ үед нормаль вектор тодорхойлогдохгүй, иймд шахагч хавтгай мөн тодорхойлогдохгүй. Муруйн орчны онолыг судлахад шахагч хавтгай чухал үүрэгтэй байдаг. Иймд шахагч хавтгай тодорхойлогдохгүй цэгийг онцгой цэг гэж авч үздэг. $\alpha''(s) = 0$ байх s цэгийг 1-р төрлийн онцгой цэг гэж нэрлэнэ. Харин $\alpha'(s) = 0$ байх цэгийг 0 төрлийн онцгой цэг гэнэ.

Цаашид бид муруйг 1-р төрлийн онцгой цэггүй гэж үзнэ (Өөрөөр хэлбэл муруйн 1-р төрлийн онцгой цэггүй орчинг авч үзэж буй хэрэг бөгөөд иим учраас энэ онолыг муруйн орчны онол гэж хэлж буй юм).

Муруй нэгж шүргэгч векторыг цаашид $t(s)$ Гэж тэмдэглэнэ($t(s) = \alpha'(s)$). Иймд

$$t'(s) = k(s) \cdot n(s)$$

болно.

Нэгж шүргэгч болон нормаль векторуудад нормаль буюу $b(s) = t(s) \wedge n(s)$ байх $b(s)$ векторыг **бинормаль** вектор гэнэ. Энд $\wedge$-ээр хоёр векторын вектор үржвэрийг тэмдэглэв. Вектор үржвэрийн тодорхойлолтоос харвал, $b(s)$ вектор шахагч хавтгайн нормаль вектор болох ба $|b(s)| = 1$ учир $|b'(s)|$ утга нь муруйн s цэг дээрх шахагч хавтгай орчны цэгийн шахагч хавтгай руу хэрхэн шилжихийг заана. Өөрөөр, үүнийг муруй шахагч хавтгайгаасаа хэрхэн хазайхыг заана гэж тайлбарлаж бас болно.

Тооцоолол хийхийн тулд $b'(s)$ вектор $b(s)$-д нормаль болохыг ($(b(s), b(s)) = 1$) ашиглавал

$$\begin{aligned} b'(s) &= t'(s) \wedge n(s) + t(s) \wedge n'(s) \\ &= t(s) \wedge n'(s) \end{aligned}$$

болно. Эндээс, $b'(s)$ вектор $t(s)$-д перпендикуляр, $n(s)$-тэй параллель болно. Иймд бид

$$b'(s) = \tau(s) \cdot n(s)$$

гэж бичиж болно.

Тодорхойлолт 4. $\alpha(s)$ муруйн уртаар параметрчлэгдэх муруйн $\alpha''(s) \neq 0$ байх s цэгийн хувьд $b'(s) = \tau(s)n(s)$ байх $\tau(s)$ утгыг α муруйн s цэг дээрх **мушгиралт** гэнэ. (мушгиралт–torsion–кручение)

$\alpha(s)$ муруй хавтгайн муруй ($\alpha(s)$ муруйг агуулсан хавтгай оршин байна) тохиолдолд $\tau \equiv 0$ байна. Урвуугаар, $\tau \equiv 0$ бол $b(s) = b_0$ тогтмол вектор болж,

$$(\alpha(s), b_0)' = (\alpha'(s), b_0) = 0$$

буюу $(\alpha(s), b_0) = \text{const}$ болно. Иймд шахагч хавтгай α муруйн цэгийн орчинд тогтмол болсноор энэ муруй цэгийнхээ орчинд хавтгайд агуулагдана.

Муруйлтаас ялгаатай нь мушгиралт нь эерэг, сөрөг аль ч утга авах боломжтой. Муруйн ориентацийг өөрчилсөн тохиолдолд $b'(s)$-ийн тэмдэг мөн өөрчлөгдөх учир мушгиралт нь оринетацийн өөрчлөлтөөр инвариант байна.

Үүгээр бид шүргэгч $t(s)$, нормаль $n(s)$, бинормаль $b(s)$ гэсэн харилцан перпендикуляр, нэгж урттай гурван вектор тодорхойллоо. Эдгээрийг **Френье-гийн гурвал** гэж нэрлэдэг.

Одоо энэ гурвалын уламжлалыг олъё. Тодорхойлолт ёсоор $t'(s) = k(s) \cdot n(s)$, $b'(s) = k(s) \cdot n(s)$ болно. Вектор үржвэрийн чанараас $n(s) = b(s) \wedge t(s)$ учир

$$\begin{aligned} n'(s) &= b'(s) \wedge t(s) + b(s) \wedge t'(s) \\ &= \tau(s) \cdot n(s) \wedge t + b(s) \wedge k(s) \cdot n(s) \\ &= -\tau(s) \cdot b(s) - k(s) \cdot t(s) \end{aligned}$$

болно. Цаашид $k(s), \tau(s)$ функцүүд болон $t(s), n(s), b(s)$ вектор функцүүдийн товчлон $k, \tau,\ t, n, b$ гэж бичвэл

$$\begin{aligned} t' &= kn \\ n' &= -\tau b - kt \\ b' &= \tau n \end{aligned}$$

болох бөгөөд энэ томьёог **Френьегийн томьёо** гэнэ.

Мөн t, b-г дайрсан хавтгайг **шүргэгч хавтгай**, n, t-г дайрсан хавтгайг **нормаль хавтгай** гэж нэрлэдэг. $\alpha(s)$-г дайрсан, харгалзан $n(s)$, $b(s)$ чиглүүлэгчтэй шулуунуудыг гол **нормаль**, **бинормаль** гэж нэрлэдэг. $R = 1/k$ тоог муруйн $\alpha(s)$ цэг дээрх **муруйлтын радиус** гэнэ.

Физик үүднээс ярьвал, шулуун эсвэл хэрчмийг хавтгай дээр муруйлган(муруйлт) дараа нь огторгуйд мушгих(мушгиралт) замаар муруйг гаргаж авдаг.

α муруй нумын уртаар болон дурын параметрчлэлээр өгөгдсөн байг ө.х. $\alpha = \alpha(s) = \alpha(t)$ байг. Энэ тохиолдолд

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= (x'(s), y'(s), z'(s)) \\ &= \left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}, \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}, \frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\right) \\ &= (x'(t), y(t), z'(t))\frac{dt}{ds}\end{aligned} \tag{1.1}$$

учир эдгээр векторын уртыг олбол

$$1 = |\alpha'(t)|\frac{dt}{ds}$$

болно. Иймд $dt/ds = 1/|\alpha'(t)|$ болно. Эндээс

$$\begin{aligned}\alpha''(s) &= \frac{d}{ds}\left(\frac{x'}{|\alpha'(t)|}, \frac{y'}{|\alpha'(t)|}, \frac{z'}{|\alpha'(t)|}\right) \\ &= \frac{\dfrac{x'(t)}{ds}\cdot|\alpha'| - x'\cdot\dfrac{d|\alpha'|}{ds}}{|\alpha'|^2}\end{aligned} \tag{1.2}$$

болно. Тухайн уламжлалуудыг тусад нь олбол

$$\begin{aligned}\frac{|\alpha'|}{dt} &= \frac{1}{|\alpha'|^2}(x'x'' + y'y'' + z'z'') \\ &= \frac{(\alpha', \alpha'')}{|\alpha'|^2},\end{aligned}$$

$$\frac{dx'}{ds} = \frac{x''}{|\alpha'|}$$

болно. Эдгээрийг (1.2) тэгшитгэлд орлуулбал,

$$\alpha''_{ss} = \frac{\alpha''}{|\alpha'|^2} - \frac{(\alpha', \alpha'')}{|\alpha'|^4} \cdot \alpha'$$

болно. Иймд

$$\begin{aligned} |\alpha''_{ss}| &= \frac{(\alpha'', \alpha'')}{|\alpha'|^4} - 2\frac{(\alpha, \alpha'')^2}{|\alpha'|^6} + \frac{(\alpha', \alpha'')^2}{|\alpha'|^6} \\ &= \frac{|\alpha''|^2 \cdot |\alpha'|^2 - (\alpha', \alpha'')^2}{|\alpha'|^6} \\ &= \frac{|\alpha' \times \alpha''|^2}{|\alpha'|^6} \end{aligned}$$

болно. Өөрөөр хэлбэл,

$$k(t) = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3}$$

байна.

Үүнтэй ижлээр

$$\tau = -\frac{(\alpha' \times \alpha'', \alpha''')}{|\alpha' \times \alpha''|^2}$$

болно.

Үүгээр бид муруйн онолын үндсэн теоремыг томъёолоё.

Теорем 1 (Үндсэн теорем)**.** I интервал дээр дифференциальчлагдах k, τ функцүүд өгөгдөв. Уг интервалын s цэг дээр $k(s) > 0$ байг. s параметр нь нумын уртан параметр байх, $k(s)$, $\tau(s)$-р харгалзан муруйлт, мушгиралтаа хийсэн $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbf{R}^3$ регуляр, муруй оршин байна. Ийм чанартай өөр $\overline{\alpha}$ муруй олддог бол энэ нь α муруйг элементар хувиргалтаар хувиргасан муруй байна. Өөрөөр хэлбэл, $\overline{\alpha}(s) = \rho \circ \alpha + c$ байх ρ эргүүлэлт(ортогональ хувиргалт), c параллель зөөлт оршин байна.

Баталгаа. □

Одоо бид $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbf{R}^3$ нумын уртаар параметрчлэгдсэн, 1-р эрэмбийн сингуляр цэггүй муруйн s_0 цэгийн орчинд уг муруйн тэгшитгэлийг $t(s_0)$, $n(s_0)$, $b(s_0)$ Френьегийн гурвалаар судалъя. Эхлээд $s_0 = 0$ гэж авъя. Энэ тохиолдолд, Тейлорын задаргаа ашиглавал

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s\alpha'(0) + \frac{s^2}{2}\alpha''(0) + \frac{s^3}{6}\alpha'''(0) + R, \tag{1.3}$$

болох ба $\lim\limits_{s\to 0}\frac{R^3}{s^3}=0$ нь үлдэгдэл гишүүн юм. Өмнөтодорхойлсноор $\alpha'(0)=t(0)=t$, $\alpha''(0)=k(0)n(0)=kn$ байна. Мөн

$$\alpha'''(0)=(k(s)n(s))'_{s=0}=k'(s)_{s=0}n(0)+k(0)n'(s)_{s=0}=k'n-k^2t-k\tau b$$

учир үүнийг (1.3) тэгшитгэлд орлуулбал

$$\alpha(s)-\alpha(0)=\left(s-\frac{k^2s^3}{3!}\right)t+\left(\frac{s^2k}{2}+\frac{s^3k'}{3!}\right)n-\frac{s^3}{3!}k\tau b+R$$

болно. Одоо координатын эх $\alpha(0)$ цэг дээр, $t=(1,0,0)$, $n=(0,1,0)$, $b=(0,0,1)$ байхаар координатын систем сонгож авсан гэвэл

$$\begin{cases} x(s)=s-\dfrac{k^2s^3}{3!}+R_x\\ y(s)=\dfrac{s^2k}{2}+\dfrac{s^3k'}{3!}+R_y\\ z(s)=-\dfrac{k\tau}{6}s^3+R_z\end{cases}\tag{1.4}$$

болно. Энд бид $s_0=0$ цэгийн орчны дурын s цэгийн хувьд $\alpha(s)=(x(s),y(s),z(s))$, $R=(R_x,R_y,R_z)$ гэж авав. (1.4) тэгшитгэлийн $\alpha(s)$ муруйн $s=0$ цэгийн орчин дахь **каноник** хэлбэр гэнэ.